

矢量光束聚焦的能量分布研究

修中淇

September 15, 2024

Abstract

本文主要研究不同类型的偏振光在数值孔径为 $NA=0.95$ 的聚焦下的光场分布。通过理论推导出各自的公式，并使用计算机模拟计算出光场在焦平面附近的能量分布。本文还将分析光斑尺寸随时间的演化规律，并对实验结果进行讨论。

1 背景介绍

偏振与振幅、相位和频率一样，是光的基本属性之一。一般而言，光的偏振指的是电场分量振荡的方向。我们知道自然光的偏振是随机的，当自然光通过偏振器或在某些特定的界面反射就形成了特定方向上的偏振光，比如线偏振光和圆偏振光。偏振不仅在我们的日常生活中有很多应用，包括偏振太阳镜，偏振相机和 3D 电影等，而且在偏振检测和偏振成像等科学研究方面也得到了广泛的应用。

本文以矢量偏振光束通过高数值孔径物镜的衍射为例，基于 MATLAB 模拟仿真展示偏振态对光场传播过程和聚焦光场的影响。对于低数值孔径透镜，只需使用傍轴近似或夫琅禾费近似的标量衍射理论。但是，对于高数值孔径透镜，聚焦光场与偏振状态密切相关，特别是对于矢量光束，聚焦光场将呈现显著的偏振特性，此时就需要使用由 RICHARDS B 和 WOLF E 在德拜标量衍射积分的基础上建立的矢量衍射理论。借助矢量衍射理论，可以精确描述矢量光束的衍射光场分布，包括振幅、相位和偏振态等。

2 理论基础

2.1 矢量光的聚焦理论

通过 Richard-Wolf 矢量积分公式推导大 NA 下矢量光束经过透镜后的焦平面电场分布 [1]，以下推导中， E 代表入射光的电场分布， E_x, E_y 分别代表出射光在焦平面 xy 方向的电场分布， $I(x, y) = |E_x^2| + |E_y^2|$ 不再赘述。公式中 $\theta_0 = \arcsin(\frac{NA}{n})$ ，其中 n 为介质折射率。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(r, \varphi', z) = & -i^{n+1} A \int_0^{\theta_{\max}} P(\theta) \cdot \{ \cos[(n-1)\varphi' + \varphi_0] \cdot [\cos \theta (J_n - J_{n-2}) + (J_n + J_{n-2})] \mathbf{e}_r \\
& + \sin[(n-1)\varphi' + \varphi_0] \cdot [\cos \theta (J_n + J_{n-2}) + (J_n - J_{n-2})] \mathbf{e}_{\varphi'} \\
& - 2i \cos[(n-1)\varphi' + \varphi_0] \sin \theta \cdot J_{n-1} \mathbf{e}_z \} \cdot e^{ikz \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (1)
\end{aligned}$$

2.1.1 线偏振光 ($E = E_0 \vec{e}_x$)

$$E_x(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \exp(ikf \cos \theta) \int_0^{2\pi} \exp(ikr \sin \theta \cos \phi) \cos \phi d\phi d\theta \quad (2)$$

$$E_y(x, y) = 0 \quad (3)$$

2.1.2 角向偏振光 ($E = E_0 \vec{e}_\theta$)

$$E_\theta(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \exp(ikf \cos \theta) \int_0^{2\pi} \exp(ikr \sin \theta \cos \phi) \sin \phi d\phi d\theta \quad (4)$$

2.1.3 径向偏振光 ($E = E_0 \vec{e}_r$)

$$E_r(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \exp(ikf \cos \theta) \int_0^{2\pi} \exp(ikr \sin \theta \cos \phi) \cos(\phi - \varphi') d\phi d\theta \quad (5)$$

2.1.4 圆偏振光 ($E = E_0(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$)

$$E_x(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \exp(ikf \cos \theta) \int_0^{2\pi} \cos \phi \exp(ikr \sin \theta \cos \phi) d\phi d\theta \quad (6)$$

$$E_y(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \exp(ikf \cos \theta) \int_0^{2\pi} i \sin \phi \exp(ikr \sin \theta \cos \phi) d\phi d\theta \quad (7)$$

2.1.5 带涡旋相位的圆偏振光 ($E = E_0 \exp(im\phi)(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$)

$$E_x(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \exp(ikf \cos \theta) \int_0^{2\pi} \cos \phi \exp(ikr \sin \theta \cos \phi + im\phi) d\phi d\theta \quad (8)$$

$$E_y(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \exp(ikf \cos \theta) \int_0^{2\pi} \sin \phi \exp(ikr \sin \theta \cos \phi + im\phi) d\phi d\theta \quad (9)$$

2.1.6 带涡旋相位的线偏振光 ($E = E_0 \exp(im\phi)\vec{e}_x$)

$$E_x(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin\theta \exp(ikf \cos\theta) \int_0^{2\pi} \exp(ikr \sin\theta \cos\phi + im\phi) \cos\phi d\phi d\theta \quad (10)$$

$$E_y(x, y) = 0 \quad (11)$$

2.1.7 带涡旋相位的角向偏振光 ($E = E_0 \exp(im\phi)\vec{e}_\theta$)

$$E_\theta(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \sin\theta \exp(ikf \cos\theta) \int_0^{2\pi} \sin\phi \exp(ikr \sin\theta \cos\phi + im\phi) d\phi d\theta \quad (12)$$

2.1.8 带涡旋相位的径向偏振光 ($E = E_0 \exp(im\phi)\vec{e}_r$)

$$E_r(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \sin\theta \exp(ikf \cos\theta) \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \phi') \exp(ikr \sin\theta \cos\phi + im\phi) d\phi d\theta \quad (13)$$

2.1.9 一般柱矢量偏振光 ($E = E_0(\cos(m\phi)\vec{e}_x + \sin(m\phi)\vec{e}_y)$)

$$E_x(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \sin\theta \exp(ikf \cos\theta) \int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \cos\phi \exp(ikr \sin\theta \cos\phi) d\phi d\theta \quad (14)$$

$$E_y(x, y) = -\frac{ikfE_0}{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \sin\theta \exp(ikf \cos\theta) \int_0^{2\pi} \sin(m\phi) \sin\phi \exp(ikr \sin\theta \cos\phi) d\phi d\theta \quad (15)$$

3 模拟仿真

3.1 光场与透镜参数

```
A = 1; % Amplitude of the field
k = 2*pi/532e-9; % Wave number (example for wavelength 632 nm)
f = 0.01; % Focal length of the lens (example 10 mm)
n = 2; % Radial order for Bessel function
phi0 = 0; % Initial phase
NA=0.95; r_max = f* tan(asin(NA)); dx = 1e-6; N=1024;
```

Listing 1: 光场与透镜参数定义

3.2 函数预定义

```
% Define the Bessel function terms
Jn_minus2 = @(theta, r) besselj(n-2, k * r * sin(theta));
Jn_plus2 = @(theta, r) besselj(n+2, k * r * sin(theta));
Jn = @(theta, r) besselj(n, k * r * sin(theta));
Jn_minus1 = @(theta, r) besselj(n-1, k * r * sin(theta));
Jn_plus1 = @(theta, r) besselj(n+1, k * r * sin(theta));

% Define the radial electric field component
Er_rad = @(theta, r, phi) A * cos((n-1) * phi + phi0) .* ...
    (cos(theta) .* (Jn(theta, r) - Jn_minus2(theta, r)) + ...
    (Jn(theta, r) + Jn_minus2(theta, r))) .* ...
    P_theta(theta, r) .* sin(theta);

Er_phi = @(theta, r, phi) A * sin((n-1) * phi + phi0) .* ...
    (cos(theta) .* (Jn(theta, r) + Jn_minus2(theta, r)) + ...
    (Jn(theta, r) - Jn_minus2(theta, r))) .* ...
    P_theta(theta, r) .* sin(theta);
```

Listing 2: 计算表达式预定义

如上图所示，为了一次性得出九种矢量光束的光强分布，同时减少程序的计算量以优化运行时间，预定义了计算中所要用到的表达式。

3.3 积分参数与积分过程

```
% Integrate over theta
theta_max = asin(NA); % Integration limit for theta
E_rad_integral = zeros(size(100,2)); E_phi_integral = zeros(size(100,2));
Isum = zeros(size(200,2)); Isumm = zeros(size(200,2));
for j = 1:200
for i = 1:200
    E_rad_integral(i,j) = integral(@(theta) Er_rad(theta, r(i), phi(j))
        *100, 0, theta_max);
    E_phi_integral(i,j) = integral(@(theta) Er_phi(theta, r(i), phi(j))
        *100, 0, theta_max);
    Isumm(i,j)=abs(E_rad_integral(i,j))^2+abs(E_phi_integral(i,j))^2;
    Isum(i,j)=abs(E_rad_integral(i,j)*cos(phi(j))-E_phi_integral(i,j)*sin(
        phi(j)))^2+abs(E_rad_integral(i,j)*sin(phi(j))+E_phi_integral(i,j)*
        cos(phi(j)))^2;
end
end
```

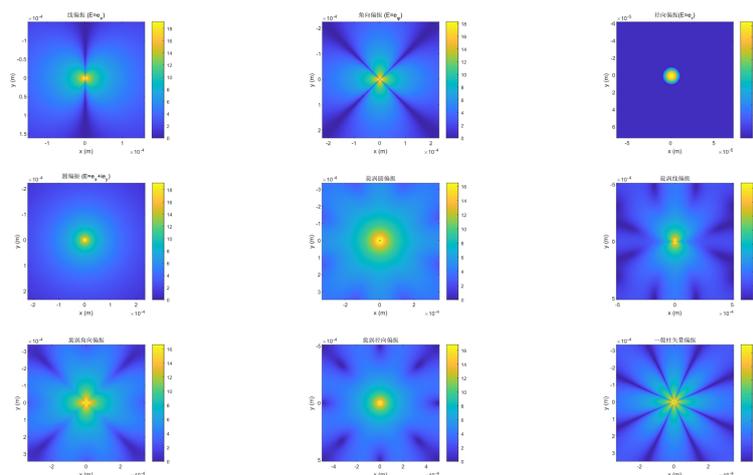
Listing 3: 积分过程

如上图所示，使用了 Richard-Wolf 矢量积分计算焦平面上的光强分布，取 i, j 的最大值均为 200，可以得到较为精细的光强分布。

4 仿真结果与讨论

4.1 焦平面光强

执行程序，得到以下的焦平面分布

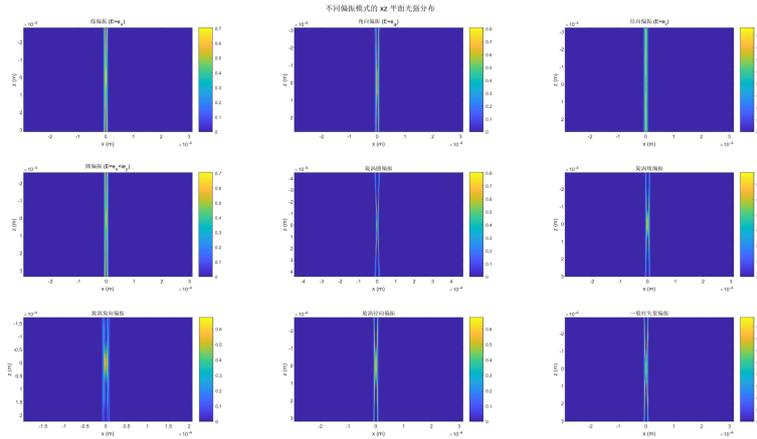


观察图像发现， x 方向的线偏振光在高数值孔径聚焦情况下产生了关于 y 轴对称的轴向光场分量。虽然聚焦光场横向分量仍旧占据主导地位，但是由于轴向分量的影响，使得总光强分布成为了椭圆形，其长轴平行于其偏振方向。圆偏振光聚焦场光强偏振特性与线偏振相似，占主导地位的横向分量呈现光斑形式。而呈现环状分布的轴向分量使得光斑变大。与线偏振不同之处在于光强分布是圆对称的。

与线偏振光和圆偏振光对比，轴对称矢量光束，径向偏振光、角向偏振光的聚焦场都为中心对称分布，但各偏振分量分布比较特殊。径向偏振光的聚焦光斑仍为圆形，横向分量为环形分布，轴向分量远大于横向分量，占主导地位。

4.2 xz 平面光强

对 z 进行扫描，切片出 xy 平面中 $y = 0$ 的部分，执行程序，得到以下的 xz 平面分布



5 仿真优化

在上述程序执行中发现，尽管对循环加入了 *Parallel* 即并行计算的优化，程序的执行速度仍然较慢。同时由于图像精度的重要性，为了加速程序增大 *Pixel* 的大小也是让人难以接受的。由于焦平面的光强可以通过简单的傅里叶变换 (加入数值孔径的限制条件)，我们可以对不同光束仅改变 *xyz* 方向的初始电场分布以完成对不同矢量偏振光束的拟合。

5.1 焦平面光强

```
polarizations = {
    @(phi, X, Y, r) (X ./ max(r, eps)), '线偏振';
    @(phi, X, Y, r) (-sin(phi) .* Y ./ max(r, eps) + cos(phi) .* X ./ max(r,
        , eps)), '角向偏振';
    @(phi, X, Y, r) (cos(phi) .* X ./ max(r, eps) + sin(phi) .* Y ./ max(r,
        eps)), '径向偏振';
    @(phi, X, Y, r) ((X + 1i * Y) ./ max(r, eps)), '圆偏振';
    @(phi, X, Y, r) ((X + 1i * Y) ./ max(r, eps)) .* exp(1i * m * phi), '涡
        旋圆偏振';
    @(phi, X, Y, r) exp(1i * m * phi) .* (X ./ max(r, eps)), '涡旋线偏振';
    @(phi, X, Y, r) exp(1i * m * phi) .* (-sin(phi) .* Y ./ max(r, eps) +
        cos(phi) .* X ./ max(r, eps)), '涡旋角向偏振';
    @(phi, X, Y, r) exp(1i * m * phi) .* (cos(phi) .* X ./ max(r, eps) +
        sin(phi) .* Y ./ max(r, eps)), '涡旋径向偏振';
    @(phi, X, Y, r) (cos(m * phi) .* X ./ max(r, eps) + sin(m * phi) .* Y
        ./ max(r, eps)), '一般柱矢量偏振';
};
```

Listing 4: 定义偏振态

如上图所示，通过预先定义偏振态，在同一傅里叶变换中即可通过改变下标一次性完成九种矢量光束的变换。

```
figure;
for idx = 1:9
    E0 = Amplitude .* polarizations{idx, 1}(phi, X, Y, r);
    E0(~mask) = 0;
    E_focal=fftshift(fft2(fftshift(E0)));
    I_focal = abs(E_focal).^2;
    subplot(3, 3, idx);
    imagesc(x, x, log(I_focal + 1));
    axis square;
    title(polarizations{idx, 2});
    xlabel('x_{\perp}(m)');
    ylabel('y_{\perp}(m)');
    colorbar;
end
```

Listing 5: 傅里叶变换

5.2 xz 平面光强

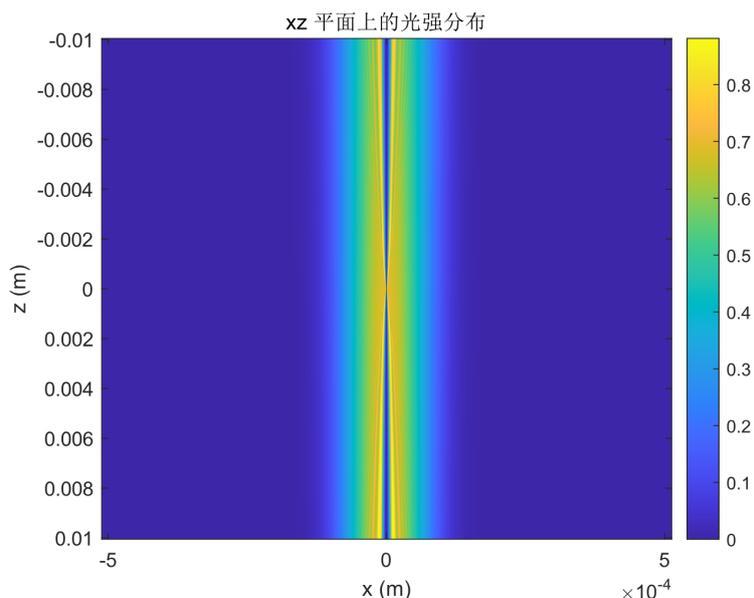
通过傅里叶变换，我们可以得到光场在焦平面上的分布。这是因为透镜可以将入射光场的傅里叶变换映射到焦平面。为了计算不同 z 平面上的光强分布，可以使用传输函数的方法，通过将焦平面上的光场乘以传输函数 $H(z) = \exp(\frac{ik(X^2+Y^2)z}{2f^2})$ 并进行逆傅里叶变换，可以得到不同 z 平面上的光场。

```
E0 = Amplitude.* polarization_func(phi, X, Y, r).* lens_phase .* mask;
E_focal = fftshift(fft2(fftshift(E0)));
I_xz = zeros(length(Z), N);
for z_idx = 1:length(Z)
    z = Z(z_idx);
    H = exp(1i * k / (2 * f) * (X.^2 + Y.^2) * z / f);
    E_z = ifftshift(ifft2(fftshift(E_focal .* H)));
    I_xz(z_idx, :) = abs(E_z(N/2, :)).^2;
end
```

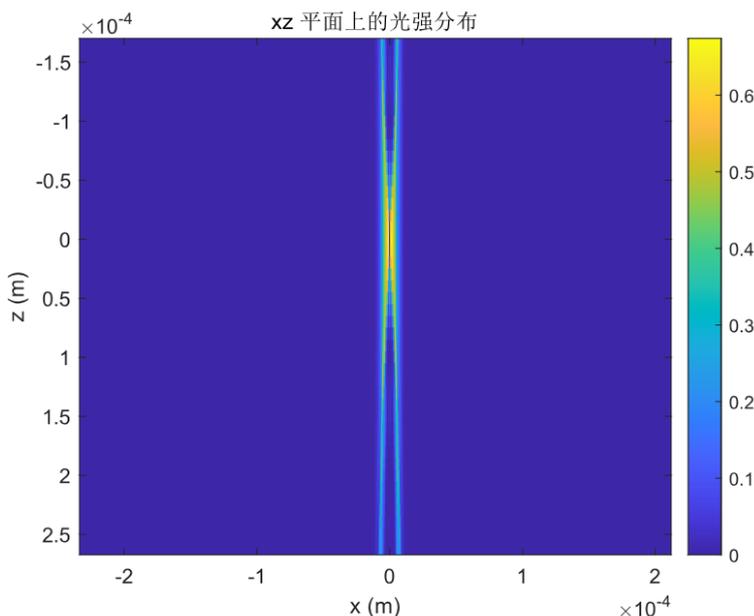
Listing 6: 傅里叶变换

5.3 一些不足与思考

在优化后的执行过程中，发现光束轮廓在焦点附近并没有发生较大的变化，反而是存在光束基底类似的光强分布，暂时没有想到如何解释这一原因。



在扩大 z 方向的范围后，发现光束的聚焦可以稍微看出但仍不是很明显。这可能是由于初始条件设置或透镜模型的近似导致。进一步的研究可以集中在改进初始条件的设置和透镜模型的精确描述上，以获得更准确的光场分布。



尽管使用了傅里叶变换来加速计算，但在焦点附近的光强分布仍然不是很清晰。这可能是由于傅里叶变换的数值实现过程中存在误差，或者在变换过程中高频分量的损失导致。考虑到光场在焦点附近的快速变化，可以尝试更精细的网格划分或高精度的数值方法来提高计算的精度。

尽管在计算中引入了并行计算以优化执行速度，但仍然存在计算速度慢的问题。进一步优化可以尝试使用更多的并行计算资源，或采用更高效的算法，如自适应积分方法，以提高计算速度。

6 结论

本文通过理论推导和数值仿真，研究了不同类型的偏振光在高数值孔径透镜聚焦下的光场分布。我们基于 Richard-Wolf 矢量积分公式，计算并分析了线偏振光、圆偏振光、径向偏振光、角向偏振光及带涡旋相位的偏振光在焦平面的能量分布情况。

在高数值孔径系统中，聚焦光场展现出显著的偏振特性。不同偏振态的入射光经过高数值孔径透镜后，其聚焦光场在焦平面的分布存在显著差异。这表明高数值孔径透镜在改变光场偏振态方面具有重要作用，需要使用矢量衍射理论进行分析和计算。

对于线偏振光，其聚焦光场在焦平面上表现为椭圆形的光斑，长轴平行于偏振方向。这主要是由于横向电场分量主导光场分布，但轴向分量的存在使得光斑整体呈现椭圆形态。圆偏振光在高数值孔径透镜下的聚焦效果与线偏振光相似，但由于其偏振态的特殊性，光场分布更加圆对称。横向电场分量依然占主导地位，且光斑整体较大，具有较好的对称性。径向偏振光和角向偏振光的聚焦光场展现出中心对称分布的特征。特别是径向偏振光，其轴向电场分量显著，导致光斑整体呈现环形分布。这些特征使得矢量光束在高精度成像和超分辨率光刻等应用中具有重要潜力。

通过 MATLAB 仿真，我们实现了对不同矢量偏振光束聚焦光场的直观展示。尽管引入了并行计算以优化计算速度，但程序在执行过程中仍存在一定的不足，例如光束基底的光强分布未能得到合理解释，焦点附近的光强分布精度不高等问题。这些不足为今后的研究提供了改进方向，包括引入更高精度的数值方法和更精细的网格划分。

7 参考文献

Kun,Huang,Peng,et al.Vector-vortex Bessel-Gauss beams and their tightly focusing properties.[J].Optics letters, 2011.DOI:10.1364/OL.36.000888.

Andrey S. Ostrovsky, Carolina Rickenstorff-Parrao, and Víctor Arrizón, "Generation of the "perfect" optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator," Opt. Lett. 38, 534-536 (2013)

蒋驰, 耿滔. 角向偏振涡旋光的紧聚焦特性研究以及超长超分辨光针的实现 [J]. 物理学报, 2023, 72(12):107-114.DOI:10.7498/aps.72.20230304.

陈瑞, 袁小瑾, 庞晓宁, 等. 基于 MATLAB 的矢量光束聚焦光场仿真 [J]. 物理与工程, 2022, 32(1):13-17. DOI:10.3969/j.issn.1009-7104.2022.01.004.

Zhang Y L, LI X Y, ZhuJ Q. Generation and focusing property with high-numerical aperture lens of vectorial polarized beam[J] . Chinese Journal of Lasers, 2009 , 36 (1) :

Dorn R, Quabis S, Leuchs G. Sharper Focus for a Radially Polarized Light Beam [J] . Physical Review Letters, 2003 , 91(23) : 233901